Cours d'électromagnétisme : L'électrodynamique relativiste

1 Relativité restreinte

1.1 Définitions et postulats

On postule qu'il existe des référentiels dans lesqels les mouvements libres des corps s'effectuent à vitesse constnte. Ce sont les référentiels inertiels.
Le principe de relativité énonce que les lois de la physique sont les mêmes danstous les référentiels inertiels.
Ce principe implique alors une vitesse infini de propagation des interactions comme par exemple l'interaction gravitationnele Terre-Soleil ($F_{T-S} = g\frac{m_s m_T}{R^2}$).
La relativité d'Eintein introduit alors la finitude de la célérité lumineuse à la vitesse de propagation des interactions. Par application du principe de relativité, cette vitesse est la même dans tous les référentiels inertiels.

1.2 Intervalle et changement de référentiel inertiel

On considère deux évènements, dans un réfrentiel K, correspondant à l'émission et la détection d'un signal lumineux.
Le première évènement est repéré par (t_1, x_1, y_1, z_1) et le deuxième par (t_2, x_2, y_2, z_2) La distance entre ces deux évènements s'exprime par

$$c(t_2 - t_1)$$

et par

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

On peut donc écrire :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] = 0$$

On considère maintenant les deux mêmes évènements dans un autre référentiel K' :

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - [(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2] = 0$$

On introduit $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, appelé l'intervalle. On vient donc de montrer que si l'intervalle est nul dans un référentiel, il le sera dans tout autre.
Dans le cas général, l'intervalle n'est pas nul, il est donc nécessaire de chercher une loi de transformation de ds^2 dans K vers ds'^2 dans K'. $ds = 0$ impliquant $ds' = 0$, la proportionnalité est assurée :

$$\Rightarrow ds'^2 = a.ds^2$$

Considérons 3 référentiels : K, K_1 et K_2. On appelle $\overrightarrow{V_1}$ la vitesse de K_1 par rapport à K, $\overrightarrow{V_2}$ la vitesse de K_2 par rapport à K, et $\overrightarrow{V_{12}}$ la vitesse de K_1 par rapport à K_2. Entre K et K_1, $ds_1^2 = a.ds^2$.

L'espace est isotrope et homogène, a ne dépend que du module de V_1 et pas de sadirection, il ne dépend pas non plus des coordonnées d'espace. Le temps est homogène, a ne dépend pas du temps. On a donc $a = a(V_1)$, ce qui permet d'écrire :

$$(1) \rightarrow ds_1^2 = a(V_1)ds^2$$

On adopte la même démarche pour les deux autres vitesses :

$$(2) \rightarrow ds_2^2 = a(V_2)ds^2$$

$$(3) \rightarrow ds_{12}^2 = a(V_{12})ds^2$$

On réalise l'opération :

$$\frac{(1)}{(2)} \rightarrow \frac{ds_1^2}{ds_2^2} = \frac{a(V_1)}{a(V_2)}$$

On déduit alors :

$$(*) \rightarrow a(V_{12}) = \frac{a(V_2)}{a(V_1)}$$

On change maintenant le sens de $\overrightarrow{V_1}$. Les directions des vitesses ne changent pas.
Les normes $|V_1|$ et $|V_2|$ ne changent pas alors que la norme de $|V_{12}|$ a changé.
Dans $(*)$, l'argument du nombre de gauche change mais celui du terme de droite ne change pas. a ne dépend donc pas du module de la vitesse : a est constant.
En considérant un changement de K vers K, $ds^2 = a.ds^2 \Rightarrow a = 1$

$$\Rightarrow ds^2 = ds'^2$$

L'intervalle est conservé par changement de référentiel inertiel.

ds^2 est une distance dans un espace pseudo-euclydien de signature $(+;-;-)$. Or, on doit conserver ds^2, il faut donc conserver les distances.
Si on omet les translations (changement d'origine trivial), et les réflections (elles n'ont pas la bonne parité), on doit donc utiliser les rotations :

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$$

$$ct = x'sh\Psi + ct'ch\Psi$$

$$x = x'ch\Psi + ct'sh\Psi$$

On regarde le mouvement de l'origine de K', x' est donc nul : $x = ct'sh\Psi$ et $ct = ct'ch\Psi$.

$$\frac{x}{ct} = \frac{sh\Psi}{ch\Psi} \Rightarrow \frac{v}{c} = th\Psi$$

On obtient donc la relation :

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

1.3 Notation d'Einstein

On pose $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ et $x^3 = z$. On note x^μ pour $\mu \in [0,3]$ et x^i pour $i \in [1,3]$.
Lorsu'un indice est répété deux fois dans un terme d'un équation (une fois en haut et une fois en bas), il y a sommation impliite sur cet indice :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

$$= \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

avec :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Les composantes en x^μ sont appelées composantes contravariantes.
On pose $x_0 = x^0$, $x_1 = -x^1$, $x_2 = -x^2$ et $x_3 = -x^3$. Ce qui est équivalent à $x_\mu = \eta - \mu\nu x^\nu$. Les composantes en x_μ sont appelées composantes covariantes.
On définit le 4-vecteur (quadri-vecteur) énergie-impulsion par :

$$P^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$$

$$P_\mu = \eta_{\mu\nu} P^\nu = (\frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z)$$

$$P_\mu P^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 c^2$$

1.4 Opérateurs différentiels sur l'espace-temps

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

on note : $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z})$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = (\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$