Cours d'électromagnétisme : L'électrodynamique relativiste

cours n°2

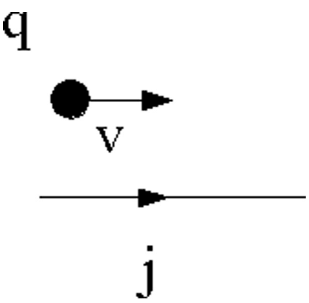
1 Le quadri-potentiel vecteur

1.1 Introduction

Au cours de ce chapitre, l'objectif sera de construire une théorie relativiste de l'électromagnétisme dont l'électrostatique devra être le pendant dans la limite des faibles vitesses.
Pour cela, on partira deséquations de l'électrostatique que l'on tentera de généraliser. On verra alors u'il n'existe qu'une seule solution qui soit invariante de Lorentz et qui redonne l'électrostatique. De plus, il apparaîtra que l'ontroduction d'un nouveau champ sera nécesssaire.

1.2 Equation fondamentale de l'électrodynamique relativiste

Dabs le cas de l'électrostatique, il n'y a pas de mouvement de charges $\Rightarrow \overrightarrow{j} = 0$ et toutes les propriétés physiques sont alors décrites par une fonction unique des coorconnées de l'espace : le potentiel électrostatique Φ.



Soit un fil parcouru par un courant, et une charge q à proximité. Ce fil ne créée pas de champ électrique au niveau de la charge q. Mais, si on se place dans le référentiel de la charge en mouvement :

$$\rho' = \frac{\rho - j\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1}$$

ρ étant nul, on a donc $\rho' = 0$. On voit donc la nécessité d'introduire un nouveau champ dont nous allons explicité la nature plus tard.

On part de l'équation de Poisson :

$$\triangle\Phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \tag{2}$$

La généralisation cherchée doit vérifier les principes de la relativité restreinte :

-autoriser une dépendance temporelle de ρ et Φ ;

-le cas statique doit permettre de retrouver l'équation de Poisson.

L'équation de Poisson ne satisfait pas lepremier point, elle n'est pas invariante pr transformation de Lorentz. En effet, les dérivations ne se font qu'à partir des coordonnées d'espace. Il faut donc généraliser le $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

On réalise ceci en appliquant $\partial_\mu \partial^\mu$:

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{j^0}{c\epsilon_0} \tag{3}$$

j^0 est la composante "temps" d'un quadri-vecteur (4-vecteur). $\partial_\mu \partial^\mu$ est un scalaire et l'égalité (3) devant être valable dans tous les référentiels (ses deux membres se transforment de la même manière), Φ doit obligatoirement être la composante temps d'un 4-vecteur.
Ceci s'écrit $\Phi = A^0$ d'un 4-vecteur A^μ de composante $(A^0, A^1, A^2, A^3) = (\Phi, cA_x, cA_y, cA_z)$, de sorte que :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^0 = \frac{j^0}{\epsilon_0 c} \tag{4}$$

On en est à espérer que les forces exercées sur les charges en mouvement sont liées à la partie vectorielle A_x, A_y, A_z du quadri-potentel A^μ. Si on cherche à écrire cette équation dans un autre référentiel, il faut effectuer une transformation de Lorentz qui se manifeste comme une matrice de transfert $4X4$, ce qui revient donc à effectuer un mélange des composantes :

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 A^0 & \alpha_2 A^1 & \alpha_3 A^2 & \alpha_4 A^3 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{5}$$

Nécessairement, cette équation doit être pour toutes les composantes :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c} \quad \forall \, \nu \in [0,3] \tag{6}$$

C'est l'équation fondamentale de l'électrodynamique relativiste. Elle est invariante de Lorentz. C'est une équation d'onde où le terme source est à droite et la "conséquence" est à gauche. Elle est conforme à l'intuition puisqu'elle montre en fait que les charges et les courants induisent des potentiels qui se propagent à la vitesse de la lumière.
On demande mantenant en plus que cette équation satisfasse à la condition de Lorentz $\rightarrow \partial_\nu A^\nu = 0$.
On applique ∂_ν à (6) :

$$\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{\partial_\nu j^\nu}{\epsilon_0 c}$$

or, $\partial_\nu j^\nu = \frac{\partial}{\partial_x^\nu} j^\nu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c\rho + \frac{\partial j_x}{\partial_x} + \frac{\partial j_y}{\partial_y} + \frac{\partial j_z}{\partial_z} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$ [1]

Par conservation de la charge :

$$\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \tag{7}$$

On pose $\Psi = \partial_\nu A^\nu \Rightarrow (7) \Leftrightarrow \partial_\mu \partial^\mu \Psi = 0$.
Ψ obéit donc à une équation d'onde mais cette équation est libre, c'est à dire qu'elle ne comporte aucun terme d'interaction avec les champs et les courants. Par cons"quent, ces ondes n'ont aucun lien avec l'électromagnétisme et on peut alors poser sans altérer la théorie $\Psi = 0$ qui est équivalent à $\partial_\nu A^\nu = 0$
On peut obtenir le même résultat en complétant l'équation (6) :

$$\partial_\mu \partial^\nu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c}$$

On applique ∂_ν :

$$\partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \partial_\nu \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c} \tag{8}$$

[1] $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{div}\,\overrightarrow{j}$

$$\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \partial_\nu \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c}$$

$$\partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu \ \Rightarrow \ \partial_\nu j^\nu = 0$$

$$\Rightarrow \ (8) \Leftrightarrow \ \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

L'équation (8) contient la conservation de la charge.
Les champs sont donc les mêmes pour (6) que pour (8).