Cours d'électromagnétisme : L'électrodynamique relativiste

cours n°3

1 Le champ tenseur

D'après les cours 1 et 2 nous ne connaisons la significaton que de la composante A^0, le potentiel scalaire Φ. Nous allons donc explorer tout A^μ.
Dans le cas statique, $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}V$. Cela signifie donc que E_x, E_y et E_z sont les composantes $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$ d'un tenseur de rang 2 $\partial^\mu A^\nu$. Les équaions $E^k = \partial^k A^0$ ne son tvalables que dans le cas statique. Il reste donc encore à trouver le lien entre le champ et le potentiel dans le cas dynamique.

$\overrightarrow{E}$ fait partie des composantes d'un tenseur de rang 2 noté $F^{\mu\nu}$ appelé champ tenseur.
On considère un potentiel de charge q en mouvement dans une distribution de charge et de courant.
On se place dans le référentiel où la particule est au repos.
Par définition, dans ce référentiel, la force est purement électrique. On définit le champ électrique comme la force par unité de charge dans le référentiel où la particule est au repos[1].

$$\frac{dp'^k}{dt'} = qE'^k \tag{1}$$

Le champ devant être vu comme les composantes $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$ d'un tenseur de rang 2, τ étant le temps propre :

$$\frac{dp'^k}{d\tau} = qE'^k = qF'^{k0} \tag{2}$$

Par analogie, on définit F'^{00} par $\frac{dp'^0}{d\tau} = qF'^{00}$.
Or, $p'^0 = \frac{E}{c} = m.c$ pour une particule au repos $\Rightarrow \frac{dp'^0}{d\tau} = \frac{dmc}{d\tau} = 0 \Rightarrow F'^{00} = 0$.

$$\frac{dp'^\mu}{d\tau} = qF'^{\mu 0} \Leftrightarrow \frac{dp'^\mu}{d\tau} = \frac{q}{mc}p'_\nu F'^{\mu 0}$$

Dans le référentiel où la charge est au repos : $p'_\nu = (mc, 0, 0, 0)$ et

$$p'_\nu F'^{\mu\nu} = \sum_{\nu=0}^{3} p'_\nu F'^{\mu\nu} = p'_0 F'^{\mu 0} = mcF'^{\mu 0}$$

Cette équation tensorielle est invariante de Lorentz :

$$\frac{dp^\mu}{dt} = \frac{q}{mc}p_\nu F^{\mu\nu} \tag{3}$$

$p_\mu \frac{dp^\mu}{dt} = \frac{q}{mc}p_\mu p_\nu F^{\mu\nu}$, or $p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \Rightarrow p_\mu \frac{dp^\mu}{dt} = 0$:

$$\Rightarrow p_\mu p_\nu F^{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

[1] Les ' signifient dans le référentiel propre

En différentiant cette équation par rapport à p_α et p_β on montre que cette équation n'est possible que si $F^{\mu\nu}$ est antisymétrique :

$$F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu} = 0$$

On sait donc comment les sources crééent les potentiels :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c} \tag{5}$$

et comment le champ tenseur exerce une force :

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{q}{mc} p_\nu F^{\mu\nu} \tag{6}$$

Il manque encore la forme explicite du champ tenseur en fonction du potentiel, c'est à dire la généralisation de $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\Phi$.
Le seul point acquis précédemment[2] suffit à leui seul à trouverune réponse uniqueà cette question. Il faut juste supposer que le champ tenseur est linéair en fonction du potentiel, ce qui peut s'accepter ici comme un fait d'expérence ou comme une réponseau premir ordre.
Pour construire $F^{\mu\nu}$ on a de disponible le quadri-vecteur ∂^μ et le quadri-vecteur A^μ, sans oublier le cas statique $E^k = \partial^k A^0$.
On pose :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{7}$$

qui est donc la seul solution possible, les indices μ et ν ne pouvant apparaître dans le même objet, ce qui donnerait une antisymétriqation nulle.
Il serait alors possible à priori de multiplier cette proposition par un scalair du type $A^\alpha A_\alpha$, $\partial_\alpha A^\alpha$, $A_\alpha \partial^\alpha$ ou $\partial_\alpha \partial^\alpha$. Les trois premiers ne satisfont pas l'hypothèse de linéarité et le dernier est incompatible avec le cas statique. Ceci amène donc à a développer les termes du champ tenseur :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & ... \\ \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 & ... & ... & ... \\ \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 & ... & ... & ... \\ \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 & ... & ... & ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & ... \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c A_x & ... & ... & ... \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c A_y & ... & ... & ... \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} c A_z & ... & ... & ... \end{pmatrix} \tag{8}$$

On définit alors :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\Phi - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t} \tag{9}$$

et[3]

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} \tag{10}$$

Le champ tenseur se récrit donc :

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & -cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

On voit donc apparaître au coeur du champ tenseur un nouveau champ non introduit encore et dont la nécessité est venue de la démonstration.
C'est le champ magnétique B.
On ne pale donc plus de champ électrique ou de champ magnétique séparemment. Les deux champs se trouvent donc intrinsèquement liés dans le champ tenseur.

[2] $F^{\mu\nu}$ est antisymétique
[3] $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$ est un rotationnel