Cours d'électromagnétisme : L'électrodynamique relativiste

cours n°4

1 Equations de Maxwell covariantes

L'équation

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c} \tag{1}$$

donne le potentiel. Nous allons maintenant chercher des équations explicites donnant le champ.
On part du champ tenseur :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu}_{\frac{j^\nu}{\epsilon_0 c}} - \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A^\mu}_{\partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \ par\, la\, relation\, de\, Lorentz\, (\partial_\nu A^\nu = 0}\quad)$$

Ce qui donne les équations de Maxwell covariantes :

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c}} \tag{2}$$

$$\boxed{\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0} \tag{3}$$

La deuxième équation bien que plus technique à établir est issue de la dérivation de (1).
On pose $\nu = 0$:

$$(2) \rightarrow \partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{j^0}{\epsilon_0 c}$$

$$\frac{\partial E^k}{\partial x^k} = \frac{c\rho}{\epsilon_0 c} \Leftrightarrow div\, \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ce qui donne donc :

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{4}$$

On pose $\nu = 3$:

$$(2) \rightarrow \partial_\mu F^{\mu 3} = \frac{j^3}{\epsilon_0 c}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x^0} + \frac{\partial E_y}{\partial x^1} + \frac{\partial E_x}{\partial x^2} = \frac{j^3}{\epsilon_0 c}$$

$$(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B})_z = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{j_z}{\epsilon_0 c^2}$$

on a $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ donc :

$$(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B})_z = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \mu_0 j_z$$

En répétant la même démarche avec $\nu = 1$ et $\nu = 2$ on obtient les composantes x et y :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_0 j \tag{5}$$

On regarde maintenant (3) en posant le triplet $(\mu, \nu, \sigma) = (1, 2, 3)$:

$$\partial^3 F^{12} + \partial^1 F^{23} + \partial^3 F^{31} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)(-cB_z) + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(-cB_y) + \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)(-cB_x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\overrightarrow{\nabla} . \overrightarrow{B} = 0 \tag{6}$$

En appliquant un autre triplet d'indice sur (3), on peut obtenir :

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = \frac{-\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \tag{7}$$