Cours d'électromagnétisme : Lois générales de l'électromagnétisme

Cours n°5

1 Interprétation physique des équations de Maxwell

Les équations de Maxwell se présentent sous la forme de deux couples :

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{div}\overrightarrow{B} = 0 \ (M\Phi) \\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \ (MF) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \ (MG) \\ \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0 \left(\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right) \ (MA) \end{array} \right\}$$

Le premier couple content les propriétés intrinsèques du champ. Le 2^{nd} renseigne sur la façon dont les sources créent le champ.
On peut noter à postériori que la conservation de la charge est contenue dans ces équations.
En effet, $\overrightarrow{\nabla}.(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B}) = 0$.
On applique la divergence à (MA) :

$$0 = \mu_0(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{E})$$

On utilise (MG) :

$$0 = \mu_0(\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

On considère S, une surface fermée quelconque et V, le volume intèrieur à cette surface. Le courant traversant S s'écrit :

$$i_S(t) = \int\int_S \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S}$$

La charge totale contenue dans V est donnée par : $q(t) = \int\int\int_V \rho dV$ Si la charge est conservée, cela signifie que le courant sortant est dû à la variation de charge :

$$i(t) = -\frac{dq}{dt}$$

soit :

$$\int\int \overrightarrow{j}\overrightarrow{dS} = -\frac{d}{dt}\int\int\int \rho dV = -\int\int\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$= \int\int\int \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j} dV = \int\int\int -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

1.1 Equation du flux ($M\Phi$)

$$\int\int\int \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B} = \int\int \overrightarrow{B} d\overrightarrow{S} = 0$$

$\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif. Il n'existe pas de monopôle magnétique.

1.2 Equation de (MF)

$$\int_{C_f} \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{l} = \int\int_{S_{C_f}} (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E}).dS = \int\int_{S_{C_f}} -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} d\overrightarrow{S}$$

Sur une surface fixe : $-\frac{d}{dt}\int\int \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$
Une variation du flux magnétique donne naissance à un champ électrique à circulation non conservative.
On verra que $e = \int_{C_f} \overrightarrow{E} d\overrightarrow{l}$ est la f.é.m.

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

C'est l'induction.

1.3 Equation de (MG)

$$\int\int \overrightarrow{E}.d\overrightarrow{S} = \int\int\int \overrightarrow{\nabla} dV = \int\int\int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{int}$$

Q_{int} est la charge Q_E à travers une surface. Ce théorème de Gauss est valable également dans les cas dépendant du temps.
Cela montre aussi qu'il n'y a pas d'accumulation de charges dans les conducteurs parcourus par un courant :

$$\overrightarrow{j} = \sigma \overrightarrow{E}$$

$$\sigma \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sigma \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$.
Dans un conducteur, $\frac{\epsilon_0}{\sigma} \approx 10^{-19}$. Aux fréquences résiduelles, les conducteurs ne comportent pas de charges.

1.4 Equation de (MA)

$$\int_{C_f} \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l} = \int\int_{S_{C_f}} (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B}) d\overrightarrow{S} = \int\int_{S_{C_f}} \mu_0 (\overrightarrow{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}) d\overrightarrow{S}$$

Dans lz a statique, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

$$\int_{C_f} \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l} = \mu_0 \int\int \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S} = \mu_0 I_{int}$$

C'est la théorème d'Ampère. La champ $\overrightarrow{B}$ tourbillonne autour qui l'a créé.
A la différence du théorème de Gauss, le théorème d'Ampère n'est valble que dans le ca statique.

On note parfois dans le cas dynamique $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{j_D})$ où $\overrightarrow{j_D} = \epsilon_0 \frac{\overrightarrow{E}}{\partial t}$ est appelé le courant de déplacement.
Ceci permet de réhabiliter le théorème d'Ampère en écrivant :

$$\int \overrightarrow{B}.d\overrightarrow{l} = (I + I_{deplacement})\mu_0$$

En réalité, le courant de déplacement ne correspond ni à un courant ni à un déplacement.
On note que le rôle de $\overrightarrow{j_D}$ dans (MA) est analogue au rôle de $\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ dans (MF). Autrement dit, dans le cas dynamique, on voit que le champ électrique et le champ magnétique sont indissociables.
Ce couplage est à l'origine d'un des plus importants phénomènes de l'électromagnétisme : la propagation.